# 第 29 講　リンゴを分ける方法

29　次の条件を満たす整数の組の組数を求めよ．ただし，$x$，$y$，$z$ は整数，$n$ は自然数とする．

(1)　$x+y \leqq n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

(2)　$x+y+z=n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$

(3)　$x+y+z=n$ かつ $x \geqq 2$ かつ $y \geqq 1$ かつ $z \geqq 0$

(4)　$x+y+z \leqq n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$

(5)　$x+y+2z=n$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第29講　リンゴを分ける方法

29　$n$ は正の整数であり，6の倍数であるとする。$1 \leqq t < u < v \leqq n$ かつ $t+u+v=n$ となる整数 $t$，$u$，$v$ の組合せは何通りあるか.

【選択肢】

㋐　$\dfrac{1}{12}n^2-n+4$（通り）　㋑　$\dfrac{1}{12}n^2+\dfrac{1}{2}n-5$（通り）

㋒　$\dfrac{1}{12}n^2-\dfrac{1}{2}n+1$（通り）



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 29 講　リンゴを分ける方法

29　次の条件を満たす整数の組の組数を求めよ．ただし，$x$，$y$，$z$ は整数，$n$ は自然数とする．

(1)　$x+y\leqq n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$

(2)　$x+y+z=n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$

(3)　$x+y+z=n$ かつ $x\geqq 2$ かつ $y\geqq 1$ かつ $z\geqq 0$

(4)　$x+y+z\leqq n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$

(5)　$x+y+2z=n$ かつ $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$

**【答】** (1) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$　(2) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$　(3) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

(4) $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$　(5) $\begin{cases} \dfrac{(n+2)^2}{4} & (n\text{ が偶数}) \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{4} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$

**【解答】**

(1)　求める整数の組の 1 つを　$(x,\ y)=(p,\ q)$　……①とする．

リンゴを $n$ 個並べ，左から $p$ 個，その次から $q$ 個を区切る場合を考えると，整数の組①は，このリンゴ $n$ 個と 2 つの区切りの並べ方と対応している．

よって求める整数の組数は，$n$ 個のリンゴと 2 個の区切りの並べ方を考えればよいので

$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} $$

(2)　(1)　において，左から $p$ 個，その次から $q$ 個を区切った後の残りを $z$ とすればよいので，求める組数は

$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} $$

(3)　与式を変形すると，$(x-2)+(y-1)+z=n-3$ となるので，(2)と同様に考えると，$n\geqq 3$ のときには求める組数は

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} $$

となり，これは $n=1,\ 2$ のときにも成り立つ．

(4)　(1)と同様に考えると求める組数は

$$ {}_{n+3}\mathrm{C}_3=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} $$

(5)　$k$ を整数とする．

(Ⅰ)　$n$ が偶数のとき，$z=k$ $\left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}\right)$ に対し $x+y=n-2k$ となる組数は

$n-2k+1$ であるので，求める組数は

$$ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(n-2k+1)=\frac{\left(\dfrac{n}{2}+1\right)\{(n+1)+1\}}{2}=\frac{(n+2)^2}{4} $$



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　$n$ が奇数のとき，$z=k$ $\left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}\right)$ に対し

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k+1)=\frac{\left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)\{(n+1)+2\}}{2}=\frac{(n+1)(n+3)}{4}$$

以上より，求める組数は

$$\begin{cases} \dfrac{(n+2)^2}{4} & (n\text{ が偶数}) \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{4} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第29講　リンゴを分ける方法

29　$n$ は正の整数であり，6の倍数であるとする。$1 \leqq t < u < v \leqq n$ かつ $t+u+v=n$ となる整数 $t$，$u$，$v$ の組合せは何通りあるか.

【選択肢】

㋐　$\dfrac{1}{12}n^2-n+4$（通り）　㋑　$\dfrac{1}{12}n^2+\dfrac{1}{2}n-5$（通り）

㋒　$\dfrac{1}{12}n^2-\dfrac{1}{2}n+1$（通り）

【答】　㋒

【解答】

$t+u+v=n$ を $(t-1)+(u-1)+(v-1)=n-3$ と考える.

$$\begin{cases} x+y+z=n-3 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす整数解の組み分け方は $n-3$ 個の球を3つの区別のできる箱に入れる入れ方と同じであるとし，それは ○ が $n-3$ 個と × が2個の並べ方と同じでもあるから

$${}_{n-1}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\ (\text{通り})$$

これが

$$\begin{cases} t+u+v=n \\ t \geqq 1,\ u \geqq 1,\ v \geqq 1 \end{cases}$$

を満たす整数解の組数である．ここで $t=u=v$ となるのは

$$t=u=v=\frac{n}{3}$$

の1通り存在し，$t=u$ となるのは

$$(1,\ 1,\ n-2),\ (2,\ 2,\ n-4),\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2}-1,\ 2\right)$$

の $\dfrac{n}{2}-1$ 通りであるので $t=u \neq v$ となるのは

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)-1=\frac{n}{2}-2\ (\text{通り})$$

$u=v \neq t$，$v=t \neq u$ の場合も同様であるので求める組合せは

$$\left\{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1-3\left(\frac{n}{2}-2\right)\right\} \times \frac{1}{3!}$$

$$=\frac{1}{12}(n^2-6n+12)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{12}n^2-\frac{1}{2}n+1}\ \textbf{(通り)}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。